ÉPREUVE DE CULTURE SCIENTIFIQUE MATHÉMATIQUE

On note $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$) le corps des nombres complexes (resp. réels, resp. rationnels). Étant donnés deux ensembles $A \subset B$, on note $B \setminus A$ le complémentaire de A dans B, c'est-à-dire $B \setminus A = \{b \in B \mid b \notin A\}$.

EXERCICE 1.

L'exercice porte sur le théorème d'approximation de Kronecker et l'existence d'une topologie exotique sur le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$. Soit N un entier, $N \geqslant 1$. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_N)\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i|$$

Si A est une partie de $\mathbb{R}^N$, on note $\overline{A}$ son adhérence. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note

$$C_\alpha = \mathbb{Z}.\alpha = \{n\alpha \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$$

le sous-groupe monogène engendré par α. Si A et B sont deux sous-groupes de $\mathbb{R}^N$, on note

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^N$$

le sous-groupe engendré par A et B.

(1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$]0, \infty[\to \mathbb{C}$$
$$T \mapsto g_\alpha(T) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2i\pi\alpha t} \, \mathrm{d}t.$$

Discuter selon la valeur de α le comportement de g_α lorsque T tend vers l'infini.

(2) Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- $\lambda \notin \mathbb{Q}$
- $\overline{(\mathbb{Z} + C_\lambda)} = \mathbb{R}$.

(4) Soit A un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- $\overline{A} \subsetneq \mathbb{R}$
- Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = C_\lambda$.

(5) Soit N un entier, $N \geqslant 1$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$. Montrer que si 1, λ_1, …, λ_N sont liés dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, alors $\overline{\mathbb{Z}^N + C_\lambda} \subsetneq \mathbb{R}^N$.

(6) On suppose que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ forme une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
Soit $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_N) \in \mathbb{R}^N$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(t) = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant N} e^{2\pi i(t\lambda_i - \phi_i)}.$$

(a) Montrer que la fonction f est bornée.

(b) On pose $\kappa = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Soit p un entier, $p \geqslant 1$. On note M le cardinal de l'ensemble des N-uplets d'entiers $(r_1, \ldots, r_N)$ satisfaisant $r_i \geqslant 0$ pour $i = 1, \ldots, N$ et $r_1 + r_2 + \ldots + r_N \leqslant p$.
Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(\beta_j)_{j=1,\ldots,M}$ tels que la puissance p-ième de f s'écrive

$$f(t)^p = \sum_{1 \leqslant j \leqslant M} a_j e^{2i\pi t\beta_j},$$

avec $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_M$.

(c) Montrer que

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant M} |a_j| = (N+1)^p$$

(Indication : comparer les a_j avec les coefficients du développement du polynôme $P(x_1, \ldots, x_N) = (1 + x_1 + \ldots + x_N)^p$ à N indéterminées).

(d) En utilisant la question 1), montrer que

$$|a_j| \leqslant \kappa^p$$

pour tout $j = 1, \ldots, M$. En déduire que

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant M} |a_j| \leqslant (p+1)^N \kappa^p.$$

(e) Montrer que $\kappa = N + 1$.

(f) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ et des entiers $m_1, \ldots, m_N$ tels que
$$|t\lambda_i - \phi_i - m_i| < \varepsilon$$
pour $i = 1, \ldots, N$.

(g) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ et des entiers $m_1, \ldots, m_N$ tels que
$$|n\lambda_i - \phi_i - m_i| < \varepsilon$$
pour $i = 1, \ldots, N$. [Indication : appliquer la question précédente à la famille $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_N)$].

(7) Étant donné $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$, conclure que les assertions suivantes sont équivalentes :
- 1, λ_1, …, λ_N forment une famille du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Z}^N + C_\lambda$ est dense dans $\mathbb{R}^N$.

(8) On note $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité. On note $G = S \times S$ muni de la structure de groupe produit $(z_1, z_2).(z_1', z_2') = (z_1 z_1', z_2 z_2')$.
On munit G de la distance
$$d(z, z') = \max\left(|z_1' - z_1|, |z_2' - z_2|\right)$$
pour $z = (z_1, z_2)$, $z' = (z_1', z_2')$.

(a) Vérifier que d est compatible à la structure de groupe, c'est-à-dire satisfait $d(gz, gz') = d(z, z')$ pour tous $g, z, z' \in G$.

(b) Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que le sous-groupe monogène $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ soit dense dans G.

(9) Soit $z = \left(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}\right) \in G$ tel que $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partie dense de G. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to G$ par
$$h(t) = \left(e^{it\theta_1}, e^{it\theta_2}\right).$$

(a) Montrer que h est un morphisme de groupe, continu et injectif.

(b) Montrer que l'inverse de la bijection $h : \mathbb{R} \to \operatorname{Im} h$ n'est pas continue.

EXERCICE 2.

Soit k un corps (commutatif) de caractéristique nulle. On note $k^\times$ l'ensemble des scalaires non nuls de k. On note $k[t]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée et $k(t)$ le corps des fractions rationnelles.
Soit $\varphi = \sum_{i=1,\ldots,n} \alpha_i X_i^2$ une k-forme quadratique définie sur le k-espace vectoriel $V = k^n$. On note $\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ la forme bilinéaire symétrique sur V associée à φ ; elle est définie par
$$\langle v, w\rangle_\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi(v + w) - \varphi(v) - \varphi(w)\right) \qquad (v, w \in V).$$
On dit que $x \in k$ est représenté par φ s'il existe $x_1, \ldots, x_n \in k$ tels que $x = \sum_{i=1,\ldots,n} \alpha_i x_i^2$. On dit que φ est isotrope si φ représente 0 non trivialement, c'est-à-dire s'il existe x_1, …, x_n non tous nuls tels que $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Si φ n'est pas isotrope, on dit que φ est anisotrope.
On note $D_\varphi(k) \subset k^\times$ l'ensemble des scalaires non nuls représentés par φ.
Plus généralement, si $A = k[t]$ ou $k(t)$, on convient que $x \in A$ est représenté par φ s'il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tel que $x = \sum_{i=1,\ldots,n} \alpha_i x_i^2$. On note alors $D_\varphi(A)$ l'ensemble des éléments de $A \setminus \{0\}$ représentés par φ. Le thème de l'exercice est le théorème de représentation de Cassels-Pfister énonçant

$$k[t] \cap D_\varphi\left(k(t)\right) = D_\varphi\left(k[t]\right). \tag{1}$$

(1) On suppose φ non dégénérée et isotrope.

(a) Montrer que $D_\varphi(k) = k^\times$.

(b) Montrer l'identité (1).

(2) Si φ est anisotrope, montrer que φ est anisotrope sur $k(t)$.

(3) On suppose $k = \mathbb{R}$ (le corps des nombres réels) et $\varphi = X_1^2 + X_2^2$.

(a) Si P, Q sont des polynômes unitaires, montrer que $P, Q \in D_\varphi(\mathbb{R}[t])$ si et seulement si $PQ \in D_\varphi(\mathbb{R}[t])$. Déterminer $D_\varphi(\mathbb{R}[t])$.

(b) Montrer que $D_\varphi(\mathbb{R}[t]) = D_\varphi(\mathbb{R}[t]) \cap \mathbb{R}[t]$.

(4) On suppose φ anisotrope. Soit $f(t) \in k[t] \cap D_\varphi(k(t))$, i.e.

$$f(t) = \sum_{i=1,\dots,n} \alpha_i \left(\frac{p_i(t)}{p_0(t)}\right)^2,$$

où $p_0(t)$, $p_1(t)$, …, $p_n(t) \in k[t]$. On suppose que p_0 n'est pas constant et on effectue la division euclidienne

$$p_i(t) = q_i(t)p_0(t) + r_i(t)$$

de p_i par p_0 pour $i = 1, \dots, n$. On pose $q_0(t) = 1$, $r_0(t) = 0$ et $p = (p_0, \dots, p_n)$, $q = (q_0, \dots, q_n)$, $r = (r_0, \dots, r_n) \in k[t]^{1+n}$.

(a) Soit ψ la $k(t)$-forme quadratique

$$\psi = -f(t)X_0^2 + \sum_{i=1,\dots,n} \alpha_i X_i^2.$$

Montrer que

$$h := \psi(q)p - 2\langle p, q\rangle_\psi \in k[t]^{1+n}$$

est un zéro de la forme ψ.

(b) Si $h = 0$, montrer que $f(t) \in D_\varphi(k[t])$ [ind : établir $0 = \psi(p) = \psi(r) = \varphi(r)$].

(c) Si $h \neq 0$, montrer que $h_0 \neq 0$, $h_0 = \dfrac{1}{p_0} \sum_{i=1,\dots,n} \alpha_i r_i^2$ et que $\deg(h_0) < \deg(p_0)$.

(d) Conclure que $f(t) \in D_\varphi(k[t])$.

(5) On suppose φ anisotrope. Soit $\delta \in k^\times$. On pose $\varphi' = \sum_{i=2,\dots,n} \alpha_i X_i^2$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\delta \in D_{\varphi'}(k) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 t^2 + \delta \in D_\varphi(k(t)).$$

(6) Si η_1 (resp. η_2) est une k-forme quadratique sur k^{n_1} (resp. k^{n_2}), on note $\eta_1 \perp \eta_2$ leur somme orthogonale, c'est-à-dire la k-forme quadratique η sur $k^{n_1+n_2}$ définie par :

$$\eta(x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}) = \eta_1(x_1, \dots, x_{n_1}) + \eta_2(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}).$$

Soient m un entier, $m \geqslant 1$ et $k(t_1, \dots, t_m)$ le corps des fractions de l'anneau des polynômes $k[t_1, \dots, t_m]$ à m indéterminées. On suppose φ anisotrope. Soit $\gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j Y_j^2$ une forme quadratique sur k^m.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- il existe une k-forme quadratique ρ telle que $\gamma \perp \rho \cong \varphi$.
- $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j t_j^2 \in D_\varphi(k(t_1, \dots, t_m))$.

Exercice 3 (recommandé pour les candidats de la discipline secondaire).

Soient n un entier, $n \geqslant 1$. On note $\mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel standard des n-uplets $(z_1, \dots, z_n)$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ sa base canonique. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de taille n et $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles de taille n. La matrice unité est notée

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in M_n(\mathbb{C})$, on rappelle que A agit sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ selon

$$A.e_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} e_i = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \qquad (j = 1, \dots, n)$$

On note

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \det(A - \lambda I_n) = 0\}$$

l'ensemble des valeurs propres de A appelé spectre. On note h la forme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$ définie par

$$h(v) = \sum_{i=1,\dots,n} v_i \overline{v_i} \text{ pour } v = (v_1, \dots, v_n)$$

et $\|v\| = \sqrt{h(v)}$. On rappelle que cette norme donne lieu à la norme

$$|||A||| = \sup\left\{ \frac{\|Av\|}{\|v\|} \mid v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

sur $M_n(\mathbb{C})$. On note $U_n \subset GL_n(\mathbb{C})$ le groupe unitaire de h, i.e.

$$U_n = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \mid X^\star X = I_n\}$$

avec la notation $X^\star = {}^t\overline{X}$.
L'exercice porte sur les sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$.

(1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $|||AU||| = |||UA||| = |||A|||$ pour tout $U \in U_n$.
   (b) Montrer que $|||A|||^2 \leqslant |||A^\star A||| \leqslant |||A^\star|||||A|||$. En déduire que $|||A||| = |||A^\star|||$.
   (c) Montrer que
   $$|||A|||^2 = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}\,(A^\star A)\}$$
   [Indication : on rappelle qu'une matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée].

(2) Montrer que les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^\times = GL_1(\mathbb{C})$ sont les groupes $C_m = \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{m}}, \ldots, e^{2i\pi\frac{(m-1)}{m}}\right\}$ pour m parcourant les entiers $\geqslant 1$.

(3) Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini. On définit la forme hermitienne $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ par
$$H(v) = \sum_{g\in G} h(g.v).$$
   (a) Montrer que H est une forme hermitienne définie positive et que G est un soous-groupe du groupe unitaire de H.
   (b) Montrer qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $MGM^{-1} \subset U_n$.

(4) Soit $U \in U_n$. On note $\mathrm{Sp}\,(U) = \left\{e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_r}\right\}$. Soit θ la longueur minimale d'un arc sur le cercle unité contenant $e^{i\theta_1}$, …, $e^{i\theta_r}$.
   (a) On suppose que $\theta > \pi$. Montrer que
   $$|||U - \lambda I_n||| \geqslant 1$$
   pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et que la valeur 1 n'est atteinte que pour $\lambda = 0$.
   (b) On suppose que $\theta \leqslant \pi$. Montrer que
   $$|||U - \lambda I_n||| \geqslant \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
   pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et qu'il existe un unique scalaire $\lambda(U)$ pour lequel $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = |||U - \lambda(U) I_n|||$.
   (c) Si $\theta \leqslant \pi$, établir de plus que
   $$|\lambda(U)| \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0.$$
   (d) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - $\theta \leqslant \dfrac{\pi}{3}$
   - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|||U - \lambda I_n||| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(5) On suppose que $n \geqslant 2$ et que G satisfait l'hypothèse suivante

   (**H**) : pour tout $g \in G$ il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $|||g - \mu I_n||| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   On suppose de plus que
   $$\mathbb{C}.I_n = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid gX = Xg \quad \forall g \in G\}.$$
   (a) On note $Z(G)$ le centre de G, i.e. $Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx\ \forall x \in G\}$. Montrer que $Z(G) \neq G$.
   (b) Montrer qu'il existe $(x_0, \mu_0) \in (G \setminus Z(G)) \times \mathbb{C}$ tel que
   $$|||x_0 - \mu_0 I_n||| = \inf\{|||x - \mu I_n||| \mid (x, \mu) \in (G \setminus Z(G)) \times \mathbb{C}\}.$$
   (c) Soit $g \in G \setminus Z(G)$. Montrer que
   $$|||x_0^{-1} g^{-1} x_0 g - I_n||| \leqslant |||x_0 - \mu_0 I_n|||.$$
   (d) En utilisant la question 4), montrer alors que $x_0^{-1} g^{-1} x_0 g \in Z(G)$.
   (e) Montrer que $x_0^{-1} g^{-1} x_0 g = 1$ (ind. trace).
   (f) En déduire une contradiction et conclure qu'un tel sous-groupe $G \subset U_n$ n'existe pas.